Einführung in die Algebraische Strukturen

Michael F. Herbst

23. April 2009
Version 1.2

1 Grundlagen

Bevor wir uns mit „richtigen" algebraischen Strukturen beschäftigen, müssen wir noch einige mathematische Grundlagen definieren, die wir im Folgenden benötigen.

1.1 kartesisches Produkt

Definition Seien X, Y Mengen. Die Menge

$$X \times Y := \{(x,y) \big| x \in X, y \in Y\}$$

bezeichnet man als das *kartesische Produkt* der Mengen X und Y. Selbstverständlich ist die Definition des kartesischen Produktes nicht nur auf zwei Mengen begrenzt, es existiert genauso

$$X \times Y \times Z := \{(x,y,z) \big| x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

und so weiter.

Bemerkung Ein (mehrfaches) karthesisches Produkt über der gleichen Menge X fasst man auch gerne zusammen:

$$X^n := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ mal}}$$

Damit können wir endlich erklären für was die „^{3}" bei $\mathbb{R}^3$ steht:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, a_3) \big| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

1.2 Abbildungen

Definition Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung f von X nach Y ordnet jedem $x \in X$ (genau) ein $y \in Y$ zu. Man schreibt z.B.:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

oder

$$f : X \to Y : x \mapsto y$$

oder

$$f : X \ni x \mapsto y \in Y$$

Beachte Diese Definition ist prinzipiell identisch mit der uns vertrauten Definition der Funktion. In der Tat bezeichnet man Abbildungen auch als Funktionen, aber wir wollen uns von der Vorstellung lösen, dass es nur Abbildungen / Funktionen, wie z.B. $f(x) = x^2$ gibt, die Zahlen andere Zahlen über eine explizite Vorschrift zuordnen. Nehmen wir einmal die Abbildung s, die der Menge der Schüler eines Kurses die Menge der Sitzplätze im Kurssaal zuordnen soll: In einer expliziten Darstellung müsste eine Formel existieren, mit der man einen Schüler in einen Stuhl „umwandeln" könnte. - Das gibt es nun aber gerade nicht! Selbstverständlich könnte man einwenden, dass jeder Schüler eine Nummer hat und man genauso die Stühle nummerieren könnte, um dann eben jene Nummern explizit zuzuordnen. Aber: Dann hat man keine explizite Darstellung für die Abbildung s gefunden, die ja Schüler auf Stühle abbildet, sondern für eine ganz andere!!

Da Mathematiker ja bekanntlich arbeitseffizient (nennen wir das in Zukunft „faul“, da es weniger Buchstaben hat) sind, geben sie bei der Definition einer Abbildung die beiden Mengen bzw. die Zuornungsvorschrift nur an, wenn es unbedingt zum Verständnis nötig ist, sprich: Manchmal schreibt man auch unvollständig: $f : X \to Y$ oder $f : x \mapsto y$.

2 Grundlegende Algebraische Strukturen

2.1 Gruppen

Definition Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ besteht aus einer *nichtleeren* Menge G und einer zweistelligen Operation $\circ$, also eine Abbildung

$$\circ : G \times G \to G : (g, h) \mapsto g \circ h,$$

so dass folgende Axiome gelten:

- **G1:** Für alle $g, h, k \in G$ gilt das *Assoziativgesetz* $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$
- **G2:** Es existiert ein sogenanntes *neutrales Element* $e \in G$, sodass für alle $g \in G$ gilt, dass $e \circ g = g$
- **G3:** Zu jedem $g \in G$ existiert ein sogenanntes *inverses Element* $g' \in G$, sodass $g' \circ g = e$.

Weiter heißt eine Gruppe sogar *abelsch* oder kommutativ, wenn zu den Gruppenaxiomen (G1) - (G3) das Axiom

- **G4:** Für alle $g, h \in G$ gilt das *Kommutativgesetz* $g \circ h = h \circ g$

gilt.

Beispiele

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ unter der normalen Addition ist eine abelsche Gruppe mit $0 \in \mathbb{Z}$ als einem neutralen Element und $-a \in \mathbb{Z}$ als ein inverses Element zu $a \in \mathbb{Z}$.)

(b) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ unter der normalen Multiplikation ist eine abelsche Gruppe mit 1 als einem neutralen und $\frac{1}{a}$ als einem zu a inversen Element.

Relativ schnell fällt auf, dass sich nur ein neutrales Element pro Gruppe finden lässt und dass man ebenfalls pro Element in einer Gruppe nur ein inverses Element finden kann. Wir fassen in einem Lemma[1] zusammen:

Lemma 1 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und hat zusätzlich die Eigenschaft

$$g \circ e = g \text{ für alle } g \in G$$

(b) Sei $g \in G$. Das inverse Element g' zu g ist eindeutig bestimmt und hat zusätzlich die Eigenschaft

$$g \circ g' = e$$

Beweis: Nach Axiom (G3), existiert zu jedem Element $g \in G$ ein inverses Element $g' \in G$. Da dieses Element ja gerade auch in der Gruppe G liegt, besitzt auch dieses Element ein inverses Element, das wir mit g'' bezeichnen wollen. Es gilt also:

$$g'' \circ g' = e \tag{1}$$

Damit gilt:

[1] Ein Lemma ist im Allgemeinen eine Art Hilfssatz. Das heißt nicht, dass Lemmas unwichtig wären — ihre Aussagen sind nur zu trivial / unbedeutend als dass man ihnen den Rang eines Satzes verleihen würde.

$$g \circ g' \overset{(G2)}{=} e \circ (g \circ g') \overset{(1)}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g')) \overset{(G1)}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g')$$
$$\overset{(G3)}{=} g'' \circ (e \circ g') \overset{(G2)}{=} g'' \circ g' \overset{(1)}{=} e \quad (2)$$

Somit hätten wir gezeigt, dass g' die zusätzliche Eigenschaft erfüllt. Damit erhalten wir:

$$g \circ e \overset{(G3)}{=} g \circ (g' \circ g) \overset{(G1)}{=} (g \circ g') \circ g \overset{(2)}{=} e \circ g \overset{(G2)}{=} g \quad (3)$$

Da wir g beliebig gewählt haben (s.o.) ist damit die zusätzliche Eigenschaft des Neutralen gezeigt.

Dass wir auch wirklich von *dem* Inversen sprechen können zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe neben dem Inversen $g' \in G$ zu g zusätzlich das Inverse $\tilde{g}' \in G$, damit gilt also trivial $g' \neq \tilde{g}'$ und

$$\tilde{g}' \circ g = e, \quad (4)$$

da $\tilde{g}'$ ja das Axiom (G3) erfüllen muss. Wir können jedoch unter Verwendung unserer bisherigen Aussagen und den Axiomen zeigen, dass

$$\tilde{g}' \overset{(3)}{=} \tilde{g}' \circ e \overset{(2)}{=} \tilde{g}' \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} (\tilde{g}' \circ g) \circ g' \overset{(4)}{=} e \circ g' \overset{(G2)}{=} g'$$

Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch zu $g' \neq \tilde{g}'$ und damit unserer Annahme, dass ein weiteres Inverses existiert.

Die Eindeutigkeit des Neutralen zeigen wir dadurch, dass wir annehmen es existiere ein weiteres Neutrales $\tilde{e} \in G$. Dieses Neutrale erfüllt auch das Axiom (G2) und folglich gilt für alle $h \in G$:

$$\tilde{e} \circ h = h. \quad (5)$$

Betrachten wir $\tilde{e} \circ e$. Da (5) für alle $h \in G$ – also auch für e – gilt und zudem (3) für alle $g \in G$, also auch für $\tilde{e}$ gilt, stellen wir fest:

$$e \overset{(5)}{=} \tilde{e} \circ e \overset{(2)}{=} \tilde{e}$$

Folglich ist auch das Neutrale eindeutig.

quod erat demonstrandum

Notation In Zukunft wollen wir das Inverse eines Elementes g in einer allgemeinen Gruppe $(G, \circ)$ mit g^{-1} oder g_G^{-1} bezeichnen. In additiven Gruppen, also Gruppen mit der Operation „+“, darf man für das Inverse auch $-g$ schreiben; in multiplikativen Gruppen ist die Schreibweise $\frac{1}{g}$ für ein Inverses erlaubt. Außerdem nehmen wir hin, dass man eine Gruppe $(G, \circ)$ vereinfacht auch als G schreiben kann, wenn die zugrundeliegende Abbildung klar ist.

Aufgabe 2.1.1 Zeige die Aussagen des Beispiels, also, dass $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ (unter der normalen Addition und Multiplikation) abelsche Gruppen sind.

Aufgabe 2.1.2 Zeige, dass $(\mathbb{R}, \cdot)$ (unter der normalen Multiplikation) keine Gruppe ist. Welche Elemente müssen aus $\mathbb{R}$ entfernt werden, damit die Menge zusammen mit der Multiplikation zu einer Gruppe würde? (Gruppennachweis dieser Gruppe erforderlich)

Aufgabe 2.1.3 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, dass $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$ bzw. dass das Inverse des Inversen von g mit g identisch ist. Welche Bedeutung hat diese abstrakte Aussage für die Addition und Multiplikation in den uns bekannten Zahlenmengen. (Hinweis: „Minus mal Minus gibt Plus“)

Aufgabe 2.1.4 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und seien $x, y \in G$ beliebige Elemente. Zeige, dass $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ gilt. (Tipp: Benutze dazu unter anderem die zusätzlich gezeigte Eigenschaft des Inversen aus unserem Lemma 1)

Die Aussage aus Aufgabe 2.1.4 zeigt wie wenig man sich in der abstrakten Mathematik manchmal auf seine Intuition verlassen darf. Von der in $\mathbb{R}$ durchaus wahren Aussage

$$-(x + y) = -x - y \quad (6)$$

ausgehend würde man im allgemeinen Fall eher $(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$ vermuten. Wie wir sehen, stimmt (6) in $\mathbb{R}$ aber nur, da $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

2.2 Ringe und Körper

Nachdem wir uns jetzt ein klein wenig mit *der* grundlegenden algebraischen Struktur vertraut gemacht haben, wolen wir uns jetzt etwas mächtigeren, uns aber auch vertrauteren Objekten zuwenden. Diese Objekte - namlich Ringe und Körper - benötigen zwar mehr Axiome zu ihrer Definition, aber man kann mit ihnen relativ intuitiv umgehen. Zunächst einmal die Definitionen:

Definition Ein *Ring mit Eins* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und den Operationen

$$+ : R \times R \to R : (a, b) \mapsto a + b \qquad \text{„}\textit{Addition}\text{“}$$

und

$$\cdot : R \times R \to R : (a, b) \mapsto a \cdot b \qquad \text{„}\textit{Multiplikation}\text{“},$$

sodass die folgenden Axiome erfüllt werden:

(i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (Man bezeichnet das neutrale Element der Gruppe mit 0_R):

(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ gilt für alle $a, b, c \in R$ („*Assoziativität der Multiplikation*“)

(iii) Es existiert ein Element $1_R \in R$ mit $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ für alle $a \in R$ („*Einselement*“)

(iv) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ sowie $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ gilt für alle $a, b, c \in R$ („*Distributivität*“)

Weiter heißt ein Ring mit Eins sogar *kommutativ*, wenn zu diesen Axiomen zusätzlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$.

Bemerkung Statt $(R, +, \cdot)$ schreibt man auch bei Ringen gerne einfach R und lässt damit die Operationen weg, falls klar ist, um welche es sich konkret handelt. Bei Multiplikationen erlaubt man es sich außerdem das Operationszeichen — den „Malpunkt“ — wegzulassen, also anstatt $a \cdot b$ lieber ab zu schreiben. Ebenso lässt man die Schreibweise $a - b$, anstatt $a + (-b)$ zu. Wie schon angemerkt bezeichnet man das Einselement eines Ringes als 1_R oder 1 und das Nullelement als 0_R oder 0. Analog zu dem neutralen Element einer Gruppe, kann man auch bei einem Ring zeigen, dass das Einselement eindeutig bestimmt ist.

Definition Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und den Operationen $+$ und $\cdot$, sodass die folgenden Axiome erfüllt werden:

(i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (Man bezeichnet das neutrale Element der Gruppe mit 0_K).

(ii) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (Man bezeichnet das neutrale Element der Gruppe mit 1_K).

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ gilt für alle $a, b, c \in R$ („*Distributivität*“)

Bemerkung Man sieht leicht, dass jeder Körper ein kommutativer Ring mit Eins ist und somit auch jeder Ring salopp gesagt „fast“ ein Körper und in der Tat unterscheiden sich Ringe und Körper durch nur sehr wenige Eigenschaften.

Beispiele

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring mit Eins, aber kein Körper.

(b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper.

Wenden wir uns nun dem Polynomring zu, dessen Elemente – die Polynome – wir bereits sehr gut kennen und dessen Eigenschaften (ebend die Eigenschaften der Polynome) uns deshalb ebenfalls bekannt vorkommen sollten:

Lemma 2 Ist R ein kommutativer Ring mit Eins, so bezeichnet man

$$R[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \; = \; a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \middle| n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R \right\}$$

als die Menge der (formalen) *Polynome* (mit Koeffizienten in R). Diese Menge ist unter den durch

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \; + \; \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot X^i := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) \cdot X^i \in R[X]$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \; \cdot \; \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot X^i := \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k+j=i} a_k \cdot b_j \right) \cdot X^i \in R[X]$$

definierten[2] Operationen ein Ring $(R[X], +, \cdot)$, der sogenannte *Polynomring* über R in der Unbestimmten X. Dieser Polynomring ist — wie der Name schon sagt — ein Ring mit Eins, und zwar sogar ein kommutativer Ring.

Beweis: Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, sei noch eine Anmerkung eingefügt. Geben wir ein Polynom f durch eine Summe an, so beispielsweise

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \; = \; a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

so impliziert dies automatisch, dass $a_m = 0$ für $m > n$, sprich ein Term $b_5 + a_5$ behält auch für $n = 4$ mit den Koeffizienten a_m des Polynoms f und einem weiteren indizierten Koeffizienten b_i seine Gültigkeit, wobei trivial $b_5 + a_5 = b_5$.
Weiterhin kann man eine Summe unter der Bedingung $m + j = i$ gemäß

$$\sum_{m+j=i} a_m \cdot b_j = \sum_{m=0}^{i} a_m \cdot b_{i-m}$$

umschreiben, da ja $m, j > 0$ und sich deswegen j als $i - m$ ergibt. Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis:

Seien $f = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i, g = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot X^i, h = \sum_{i=0}^{k} d_i \cdot X^i \in R[X]$ beliebige Polynome. Wir wollen nun zunächst nachweisen, dass $(R[X], +)$ eine abelsche Gruppe ist: Wir stellen dafür fest, dass das Polynom $X^2 \in R[X]$, somit ist $R[X]$ also nicht leer. Ausgehend von der Tatsache, dass $(R, +)$ eben eine abelsche Gruppe ist, ergibt sich für alle beliebigen f, g, h, dass

$$\begin{aligned}
(f+g)+h &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i + \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot X^i \right) + \sum_{i=0}^{k} d_i \cdot X^i = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) \cdot X^i + \sum_{i=0}^{k} d_i \cdot X^i \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{m,n,k\}} ((a_i + b_i) + d_i) \cdot X^i \overset{(G1) \text{ in } (R,+)}{=} \sum_{i=0}^{\max\{m,n,k\}} (a_i + (b_i + d_i)) \cdot X^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i + \sum_{i=0}^{\max\{n,k\}} (b_i + d_i) \cdot X^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot X^i + \sum_{i=0}^{k} d_i \cdot X^i \right) \\
&= f + (g + h)
\end{aligned}$$

und ebenso

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) \cdot X^i \overset{(G4) \text{ in } (R,+)}{=} \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (b_i + a_i) \cdot X^i = g + f$$

[2]Die Funktion $\max(M)$ macht nichts anderes als die größte in der Menge M enthaltene Zahl zurückzugeben.

gilt. Damit ist also $(R[X],+)$ assoziativ und kommutativ. Da wir in jedem der Gleichungsketten das entsprechende Axiom in R angewendet haben, spricht man davon, dass sich die Assoziativität bzw. Kommutativität von R auf $R[X]$ *überträgt*.

Nehmen wir weiter an, dass das Nullpolynom $0_{R[X]} = \sum_{i=0}^{-1} 0_R \cdot X^i \in R[X]$ auch das neutrale Element in $(R[X],+)$ ist. Dies verifiziert man leicht durch das beliebig gewählte Element f, da eben für dieses und damit alle Polynome f gilt:

$$0_{R[X]} + f = \sum_{i=0}^{\max\{-1,m\}} (0_R + a_i) \cdot X^i \overset{(G2) \text{ in } (R,+)}{=} \sum_{i=0}^{m} (a_i) \cdot X^i = f$$

Analog bestätigt sich die Annahme, dass $-f := \sum_{i=0}^{m} -a_i \cdot X^i \in R$ das zu einem bel. Polynom f inverse Polynom ist, durch:

$$f + (-f) = \sum_{i=0}^{\max\{m,m\}} (a_i + (-a_i)) \cdot X^i \overset{(G3) \text{ in } (R,+)}{=} \sum_{i=0}^{m} 0_R \cdot X^i = 0_{R[X]}$$

Wir hätten somit schon einmal gezeigt, dass $(R[X],+)$ — wie für einen Ring gefordert — eine abelsche Gruppe ist. Damit müssen wir nun nur noch die entsprechenden Eigenschaften der Multiplikation zeigen. Die Assoziativität überträgt sich vom Ring R ohne weiteres auf $R[X]$:

$$\begin{aligned}(f \cdot g) \cdot h &= \left(\sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j+h=i} a_j \cdot b_h \right) \cdot X^i \right) \cdot \sum_{l=0}^{k} d_l \cdot X^l = \sum_{i=0}^{m+n+k} \left(\sum_{o+l=i} \left(\sum_{j+e=o} a_j \cdot b_e \right) \cdot d_l \right) \cdot X^i \\ &\overset{\text{Ass in } R}{=} \sum_{i=0}^{m+n+k} \left(\sum_{l+j+e=i} a_j \cdot b_e \cdot d_l \right) \cdot X^i \overset{\text{Ass in } R}{=} \sum_{i=0}^{m+n+k} \left(\sum_{j+o=i} a_j \cdot \left(\sum_{l+e=o} b_e \cdot d_l \right) \right) \cdot X^i \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot X^j \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+k} \left(\sum_{l+e=i} b_e \cdot d_l \right) \cdot X^i \right) = f \cdot (g \cdot h)\end{aligned}$$

Durch das beliebige Element f zeigen wir, dass das Einspolynom $1_{R[X]} = \sum_{i=0}^{0} 1_R \cdot X^i \in R[X]$ das Einselement im Ring $R[X]$ ist. Man beachte dazu, dass das Einspolynom gerade nur einen Koeffizienten $b_0 = 1_R$ hat und deswegen $b_m = 0$ für $m > 0$ — wie oben bereits angemerkt. Folglich erhalten wir:

$$f \cdot 1_{R[X]} = \sum_{i=0}^{0+m} \left(\sum_{k+j=i} a_k \cdot \left\{ \begin{array}{ll} 1_R & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{array} \right\} \right) \cdot X^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i = f$$

$$1_{R[X]} \cdot f = \sum_{i=0}^{m+0} \left(\sum_{k+j=i} \left\{ \begin{array}{ll} 1_R & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{array} \right\} \cdot a_k \right) \cdot X^i = f$$

Um vollständig zu zeigen, dass $R[X]$ ein Ring ist, fehlt uns nur noch dessen Distributivität (wieder anhand der allgemeinen f, g, h zu zeigen. Zum einen gilt die *Linksdistributivität*

$$\begin{aligned}f \cdot (g + h) &= \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i \cdot \sum_{i=0}^{\max\{n,k\}} (b_i + d_i) \cdot X^i = \sum_{i=0}^{m+\max\{n,k\}} \sum_{l+j=i} a_l \cdot (b_j + d_j) \cdot X^i \\ &\overset{\text{Dist in } R}{=} \sum_{i=0}^{\max\{m+n,m+k\}} \sum_{l+j=i} (a_l \cdot b_j + a_l \cdot d_j) \cdot X^i = \sum_{i=0}^{\max\{m+n,m+k\}} \left(\sum_{l+j=i} (a_l \cdot b_j) + \sum_{l+j=i} (a_l \cdot d_j) \right) \cdot X^i \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l+j=i} (a_l \cdot b_j) \cdot X^i + \sum_{i=0}^{m+k} \sum_{l+j=i} (a_l \cdot d_j) \cdot X^i = f \cdot g + f \cdot h\end{aligned}$$

und zum anderen analog die *Rechtsdistributivität*

$$\begin{aligned}(g + h) \cdot f &= \sum_{i=0}^{\max\{n,k\}+m} \sum_{j+l=i} (b_j + d_j) \cdot a_l \cdot X^i \overset{\text{Dist in } R}{=} \sum_{i=0}^{\max\{n+m,k+m\}} \sum_{j+l=i} (b_j \cdot a_l + d_j \cdot a_l) \cdot X^i \\ &= g \cdot f + h \cdot f\end{aligned}$$

Als kleines Additum zeigen wir nun zudem, dass $R[X]$ ein kommutativer Ring ist, was sich von R überträgt:

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j+h=i} a_j \cdot b_h \right) \cdot X^i \overset{R:\text{ kommRi}}{=} \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{h+j=i} b_h \cdot a_j \right) \cdot X^i = g \cdot f$$

quod erat demonstrandum

Aufgabe 2.2.1 Zeige, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist, während $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ „nur“ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Aufgabe 2.2.2 Zeige, dass das Einselement eines Ringes eindeutig bestimmt ist. (Tipp: Vergleiche mit dem Beweis der Eindeutigkeit des Neutralen einer Gruppe!)

Aufgabe 2.2.3 Zeige, dass jeder Körper ein kommutativer Ring mit Eins ist.

2.3 Vektorräume

Vektorräume stellen die letzte algebraische Strucktur dar, auf die wir ein Auge werfen wollen. Sie ist vielleicht diejenige Strucktur, die uns auf Anhieb am bekanntesten vorkommt, denn mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ haben wir alle schon einmal Bekanntschaft gemacht und dabei eine „neue“ Form der Addition und Multiplikation kennen gelernt. Dies werden wir nun etwas genauer betrachen:

Definition Sei K ein Körper. Ein K-*Vektorraum* V besteht aus einer Menge V und den Operationen

$$+ : V \times V \to V : (x, y) \mapsto x + y \qquad \text{„(vektorielle) } \textit{Addition}\text{“}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \qquad \text{„skalare } \textit{Multiplikation}\text{“.}$$

Dabei unterliegen diese Daten den Axiomen:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ gilt für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $x \in V$

(iii) $1_K \cdot x = x$ für alle $x \in V$

(iv) für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gelten die *Distributivgesetze*:

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(\lambda + \mu)x = b \cdot \lambda + \mu \cdot x$$

Bemerkung Es gibt ähnlich wie bei Ringen oder Körpern auch die Notation $(V, +, \cdot)$ um einen K-Vektorraum zu bezeichnen. Falls keine Missverständnisse entstehen können, lässt man die Angabe des Körpers weg und spricht nur von einem Vektorraum. Besonders häufig sind reelle Vektorräume, also $\mathbb{R}$-Vektorräume und — für uns weniger wichtig — komplexe $\mathbb{C}$-Vektorräume. Die Elemente eines Vektrorraumes V bezeichnet man als *Vektoren*, die Elemente des Körpers K oft als *Skalare*.

In der Symbolik erspart man es sich über Vektoren einen Vektorpfeil zu setzen, da Vektoren ja nicht immer Klassen von Pfeilen darstellen (und die meisten Mathematiker ersparen sich den Vektorpfeil auch dann.) Demnach sind typische Variablen für Vektoren „nackte“ lateinische Buchstaben wie a, b, c, x, y. Zur Unterscheidung werden Skalarvariablen meist mit griechischen Buchstaben, wie $\lambda, \mu, \nu, \sigma, \xi$ bezeichnet. Man beachte, dass einem Vektorraum immer eine nichtleere Menge zugrunde liegt, da dies bei den Gruppenaxiomen für $(V, +)$ gefordert wird!

Beispiele

(a) Wie wir noch sehen werden ist $\mathbb{R}^3$ ein reeller Vektorraum. (Beweis siehe unten)

(b) Ebenso ist $\mathbb{R}[X]$ ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum. (Beweis siehe unten)

(c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$ - Vektorraum. (Beweis siehe Aufgabe 1)

Korollar 3 [3] In der uns bekannten Formulierung ist die Menge

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

unter der uns bekannten Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \qquad \forall a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

und der uns bekannten Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \qquad \forall a_1, a_2, a_3, \lambda \in \mathbb{R}^3$$

ein reeller Vektorraum.

Beweis: Für die Vektoraddition im $\mathbb{R}^3$ kennen wir bereits einige Eigenschaften. So wissen wir, dass diese Operation kommutativ und assoziativ ist, also für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{und} \qquad a + b = b + a$$

gilt. Zudem wissen wir, dass die Addition des Nullvektors $0 \in \mathbb{R}^3$ den anderen Summanden unverändert lässt

$$a + 0 = a + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

und dass die Addition des Gegenvektors

$$-a = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

zu dem Vektor selbst den Nullvektor ergibt:

$$a + (-a) = 0$$

Da eben der Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ liegt, ist $\mathbb{R}^3 \neq \emptyset$. Folglich ist $(\mathbb{R}^3, +)$ unter der bekannten Vektoraddition eine ablesche Gruppe mit dem Gegenvektor als dem zu einem gegebenen Vektor inversen Element und mit dem Nullvektor als dem neutralen Element.

Auch für die Skalarmultiplikation kennen wir schon einige Eigenschaften. Wir wissen, dass die Skalarmultiplikation distributiv und assoziativ ist, also für zwei beliebige Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und zwei beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \qquad \text{und} \qquad (\lambda + \mu)x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

beziehungsweise

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$$

[3] Ein Korollar ist ein Hilfssatz über Eigenschaften meist recht konkreter Objekte, der sich aus schon bekannten Eigenschaften und Fakten relativ leicht ergibt.

gilt. Zusätzlich kann man sich denken, dass die 1 das sogenannte *Unitätskriterium*

$$1 \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$ erfüllt, was $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ unter der bekannten Vektoraddition und der bekannten Skalarmultiplikation eben genau zu einem reellen Vektorraum macht.

quod erat demonstrandum

Korollar 4 Die Menge der (formalen) reellen Polynome

$$\mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \middle| n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

unter der bekannten Addition

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \; + \; \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot X^i := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) \cdot X^i \in R[X]$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \;\cdot\; \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i := \sum_{i=0}^{m} (\lambda \cdot a_i) \cdot X^i$$

ist ein reeller Vektorraum.

Beweis: Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, ist $\mathbb{R}$ auch ein kommutativer Ring mit eins und damit nach Lemma 2 $\mathbb{R}[X]$ ein Ring mit Eins. Folglich ist $(\mathbb{R}[X], +)$ eine abelsche Gruppe. Die restlichen Eigenschaften ergeben sich aus der Tatsache, dass alle reelen Zahlen ja auch Polynome (vom Grad 0) sind, sprich, dass $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$. Um das etwas verständlicher zu machen schreiben wir die Skalarmultiplikation etwas um:

$$\lambda \;\cdot\; \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i = \sum_{i=0}^{0} \lambda \cdot X^0 \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot X^i = \sum_{i=0}^{0+m} \left(\sum_{k+j=i} \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{array} \right\} \cdot a_j \right) \cdot X^i = \sum_{i=0}^{m} \lambda \cdot a_i \cdot X^i$$

Wie wir wissen, ist die Multiplikation im Ring $\mathbb{R}[X]$ distributiv und assoziativ, es gilt also für alle $x, y, z \in \mathbb{R}[X]$:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \text{und} \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z$$

beziehungsweise

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Da die Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$ auch Polynome / Vektoren sind, gilt automatisch:

$$\lambda \cdot (y + z) = \lambda \cdot y + \lambda \cdot z \qquad \text{und} \qquad (\lambda + \mu) \cdot z = \lambda \cdot z + \mu \cdot z$$

beziehungsweise

$$\lambda \cdot (\mu \cdot z) = (\lambda \cdot \mu) \cdot z$$

Also sind die geforderten Assoziativ- und Distributivkriterien für einen Vektorraum erfüllt. Erstaunlicherweise stimmen die Einselemente des Rings $\mathbb{R}[X]$ und des Körpers $\mathbb{R}$ überein:

$$1_{\mathbb{R}[X]} = \sum_{i=0}^{0} 1_{\mathbb{R}} \cdot X^0 = 1_{\mathbb{R}}$$

Wegen $1_{\mathbb{R}[X]} \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}[X]$ gilt damit auch das geforderte Unitätskriterium

$$1_{\mathbb{R}} \cdot x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}[X]$$

und damit ist $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum

quod erat demonstrandum

Aufgabe 2.3.1 Seien L, K zwei Körper mit $K \subseteq L$. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist. In wie fern, verifiziert dies die Aussage „$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$ - Vektorraum" .

Aufgabe 2.3.2 Seien L, K Ringe mit $K \subseteq L$. Beweise bzw. widerlege die Aussage „L ist ein K-Vektorraum".

Aufgabe 2.3.3 Obwohl wir lineare Unabhängigkeit für den allgemeinen Fall nicht definiert haben, so funktioniert eine Untersuchung auch in abstrakten Vektorräumen auf ähnliche Weise. Versuche dich an folgenden Aufgaben:

a) Zeige, dass das Quadrupel $(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{8},\ 5)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ lin. abhängig ist. Welches Element muss entfernt werden, damit das neue Tripel lin. unabhängig ist.

b) Betrachte nun den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$. Untersuche (X^2+1, X^2, X^2-1) und $(X^5-X^4, X-1)$ auf lineare (Un)Abhängigkeit.

3 Innere Produkträume

Wir kennen ja vom $\mathbb{R}^3$ bereits die Tatsache, dass wir die Länge eines Vektores oder gar den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen können. Diese Eigenschaft besitzt jedoch bei weitem nicht jeder Vektorraum. Nur eine Unterart der Vektorräume, die sog. inneren Produkträume besitzen diese wichtige Eigenschaft. Da allerdings innere Produkträume immer noch abstrakte Objekte sind, kann man durchaus Winkel zwischen Objekten ausrechnen bei denen man etwas derartiges nicht erwartet hätte (z. B. bei formalen Polynomen).

3.1 Struktur

Definition Ein Innerer Produktraum über einem Körper K ist ein Quadrupel $(V, +, \cdot, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ bestehend aus einer Menge V und den Operationen

$$+ : V \times V \to V : (x, y) \mapsto x + y \qquad \text{„(vektorielle) } \textit{Addition}\text{“,}$$
$$\cdot : K \times V \to V : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \qquad \text{„skalare } \textit{Multiplikation}\text{“.}$$

und

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to K : (x, y) \mapsto \langle x|y\rangle \qquad \text{„}\textit{inneres Produkt}\text{“}$$

Dabei unterliegen diese Daten den Axiomen:

(i) $(V, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

(ii) $\langle x|x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in V$

(iii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^* \qquad \forall x \in V$

(iv) $\langle x|\lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x|y\rangle + \mu\langle x|z\rangle \qquad \forall x, y, z \in V$ und $\forall \lambda, \mu \in K$

Bemerkungen Selbstverständlich schreibt kaum ein Mathematiker einen Ausdruck wie $(V, +, \cdot, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ vollkommen aus. Wenn keine Verständnisprobleme entstehen können, bezeichnet man einen inneren Produktraum meist als $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ oder aber nur als V. Für das innere Produkt gibt es auch weitere Darstellungsweisen, wie z.B.

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to K : (x, y) \mapsto (x, y).$$

Im Axiom (iii) bezeichnet das „*" die sogenannte „komplexe Konjugation", die bei inneren Produkträumen über dem Körper der reellen Zahlen - wie wir sie ausschließlich behandeln werden - vollkommen irrelevant ist. Für uns ist quasi das Axiom $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ zu erfüllen.

Beispiele

(a) Der $\mathbb{R}^3$ unter der bekannten Vektoraddition und der Skalarmultiplikation ist zusammen mit dem Skalarprodukt ein (reeller) innerer Produktraum. (Nachweis siehe unten)

(b) Der Polynomring $\mathbb{R}[X]$ unter der bekannten Polynomaddition und der in Korollar 4 erwähnten Skalarmultiplikation ist zusammen mit dem inneren Produkt $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$ ein (reeller) innerer Produktraum. (Nachweis siehe unten)

Korollar 5 Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist zusammen mit dem bekannten Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \qquad \forall a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

ein innerer Produktraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Beweis Dass $\mathbb{R}^3$ ein reeller Vektorraum ist, ist uns bereits aus Korollar 3 bekannt; Axiom (i) der Definition eines inneren Produktraumes ist also erfüllt. Zusätzlich kennen wir die folgenden Eigenschaften des Skalarprodukts für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$

(2) $\langle \lambda \cdot a|b\rangle = \lambda \cdot \langle a|b\rangle$

(3) $\langle a + b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle$

(4) $\langle a|a\rangle \geq 0$

Auf einen Blick erkennt man, dass durch (1) und (4) die Axiome (ii) und (iii) erfüllt werden. Axiom (iv) ergibt sich durch die Eigenschaften (1), (3) und (4) der Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} \langle x|\lambda y + \mu z\rangle &\overset{(1)}{=} \langle \lambda y + \mu z|x\rangle \overset{(3)}{=} \langle \lambda y|x\rangle + \langle \mu z|x\rangle \overset{(4)}{=} \lambda\langle y|x\rangle + \mu\langle z|x\rangle \\ &\overset{(1)}{=} \lambda\langle x|y\rangle + \mu\langle x|z\rangle \end{aligned} \qquad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Somit ist $\mathbb{R}^3$ unter den gegebenen Operationen ein innerer Produktraum.

quod erat demonstrandum

Korollar 6 Der (formale) Polynomring $\mathbb{R}[X]$ ergibt als reeller Vektorraum zusammen mit dem inneren Produkt

$$\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx \qquad \forall\ f, g \in R[X]$$

einen inneren Produktraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Beachte Diese Formulierung des inneren Produktes des $\mathbb{R}[X]$ ist mathematisch nicht ganz korrekt, denn eine bestimmte Integration formaler Polynome ist in der uns bekannten Art und Weise nicht möglich. Dies kommt daher, dass sich in *formale* Polynome — die nun einmal die Elemente des formalen Polynmomrings $\mathbb{R}[X]$ sind — keine Zahlwerte einsetzen lassen, denn sie sind keine Abbildungen/Funktionen, sondern eben formale Polynome. Um jetzt in ein formales Polynom einen Wert einsetzen zu können muss man dieses erst über eine Abbildung, den sog. Einsetzhomomorphismus, in eine Abbildung „umwandeln“. Diese Abbildung kann man dann wie oben gefordert integrieren.

Noch ein Wort dazu, warum formale Polynome auch nach der „Schuldefinition“ keine Funktionen sein können: Wie wir wissen sind alle reellen Zahlen auch formale Polynome, eben Konstantpolynome, aber eine Funktion „4(x)“ ist schwierig denkbar.

Beweis von Korollar 6: Wir wissen bereits aus Korollar 4, dass $\mathbb{R}[X]$ ein reeller Vektorraum ist. Damit wäre also Axiom (i) der Definition eines inneren Produktraumes erfüllt. Seien nun $f, g, h \in \mathbb{R}$ beliebige Polynome und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare. Zum Beweis dafür, das das Axiom (iii) gilt, benötigen wir nur die Kommutativität im Ring $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{-1}^{+1} g(x) \cdot f(x)dx = \langle g|f\rangle$$

Die Gültigkeit der anderen Axiome zeigen wir durch die Eigenschaften des Integrals. Axiom (ii) ergibt sich aus der Beobachtung, dass das Integral für eine auf einem Intervall positive Funktion auch ein positives Vorzeichen aufweist:

$$\langle f|f\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{+1} (f(x))^2\, dx \geq 0 \qquad \text{wegen } (f(x))^2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Der Beweis für die Gültigkeit des Axioms (iv) benutzt die Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}\langle f|\lambda g + \mu h\rangle &= \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot (\lambda g + \mu h)(x)\ dx = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot (\lambda \cdot g(x) + \mu \cdot h(x))\ dx \\ &= \int_{-1}^{+1} (\lambda \cdot f(x) \cdot g(x) + \mu \cdot f(x) \cdot h(x))\ dx = \lambda \cdot \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot g(x)\ dx + \mu \cdot \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot h(x)\ dx \\ &= \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle\end{aligned}$$

quod erat demonstrandum

3.2 Betrag und Winkel im inneren Produktraum

Definition Ist V ein innerer Produktraum mit dem inneren Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$, so wird der Betrag $\|x\|$ eines Vektors $x \in V$ definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Definition Wählt man aus einem inneren Produktraum V zwei Vektoren $x, y \in V\backslash\{0\}$, so nennt man die Zahl

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

(welche möglichst im Intervall $[0, \pi]$ liegen sollte) den Winkel $\angle(x, y)$ zwischen diesen Vektoren x, y.

Definition Zwei Vektoren $x, y \in V\backslash\{0\}$ aus einem inneren Produktraum V heißen *orthogonal*, falls

$$\langle x|y\rangle = 0$$

Bemerkung Wie man leicht feststellt sind diese Definitionen volkommen analog zu den bekannten Betrag und Winkeldefinitionen im $\mathbb{R}^3$-was auch nicht weiter verwunderlich ist. Man beachte, dass der Nullvektor zwar eine Länge hat, jedoch existiert zwischen ihm und einem bel. anderen Vektor kein Winkel und er kann folglich auch zu keinem anderen Vektor orthogonal sein.

Noch eine kleine Anmerkung: Bekanntlich muss man bei Wurzelfunktionen immer etwas vorsichtiger sein, da ja im reellen Zahlenbereich zu einer negativen Zahl keine Wurzel existiert. Nun wissen wir, dass das Skalarprodukt durchaus einmal negativ sein kann, ebenso wie jedes andere innere Produkt auch. Man könnte also vermuten, dass die Betragsdefinition als Wurzel eines inneren Produktes wegen eventuell auftretenden Definitionslücken eher ungünstig ist — oder wie man mathematisch korrekter sagt — dass der Betrag nicht wohldefiniert ist. Dem ist aber nicht so, da ja axiomatisch festgelegt ist, dass $\langle x|x\rangle \geq 0$ sein muss.

Beispielrechnungen Da wir schulisch bedingt schon recht gut mit dem inneren Produktraum $\mathbb{R}^3$ vertraut sind, konzentrieren sich die Beispielaufgaben auf den $\mathbb{R}[X]$:

a) Betrag

$$\|X^2\| = \langle X^2 \mid X^2 \rangle = \int_{-1}^{+1} (x^2)^2 \; dx = \frac{2}{5}$$
$$\|3X+2\| = \langle 3X+2 \mid 3X+2 \rangle = \int_{-1}^{+1} (3x+2)^2 \; dx = \int_{-1}^{+1} 9x^2 + 6x + 4 \; dx = 12$$

b) inneres Produkt

$$\left\langle X \;\middle|\; \frac{1}{2}(3X^2-1) \right\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(3x^2-1) \cdot x \; dx = \int_{-1}^{+1} \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \; dx = 0$$
$$\langle X^3 + X^2 \mid X - 1 \rangle = \int_{-1}^{+1} (x^2+x) \cdot (x-1) \; dx = \int_{-1}^{+1} x^4 - x^2 \; dx = \frac{-4}{15}$$

c) Winkel

$$\begin{aligned}
\cos\angle(X^3+X, -X^2+X-3) &= \frac{\langle X^3+X \mid -X^2+X-3 \rangle}{\|X^3+X\| \cdot \|-X^2+X-3\|} \\
&= \frac{\int_{-1}^{+1} \left(x^3+x\right)\left(-x^2+x-3\right) \; dx}{\sqrt{\int_{-1}^{+1} (x^3+x)(x^3+x) \; dx} \cdot \sqrt{\int_{-1}^{+1} (-x^2+x-3)(-x^2+x-3) \; dx}} \\
&= \frac{\int_{-1}^{+1} -x^5+x^4-4x^3+x^2-3x \; dx}{\sqrt{\int_{-1}^{+1} x^6+2x^4+x^2 \; dx} \cdot \sqrt{\int_{-1}^{+1} x^4-2x^3+7x^2-6x+9 \; dx}} \\
&= \frac{\frac{16}{15}}{\sqrt{\frac{184}{105}} \cdot \sqrt{\frac{346}{15}}} \\
&\Rightarrow \angle(X^3+X^2+5, -X^2+X-3) \approx 1,40223 \mathrel{\hat{=}} 80,3416°
\end{aligned}$$

3.3 Ausblick

Nun mag sich einer sicher fragen: Was bringt mir das jetzt zu wissen welchen Winkel die Polynome haben, wenn ich diese - im Gegensatz zu Vektoren des $\mathbb{R}^3$ - sowoeso nicht fassen kann? Zunächst sei gesagt, dass diese Frage durchaus seine Berechtigung hat, denn jemand der weder Physik noch Mathe, noch physikalische Chemie studiert, wird mit Winkeln zwischen Polynomen wenig zu tun haben. Den Physiker jedoch interessieren orthogonale Polynome sehr, denn sie haben bei einigen physikalischen Methoden ihre Anwendung - so z.B. bei der Fourierentwicklung.

Prinzipiell kann man aus dem Raum der Polynome heraus auch „Polynomgeraden“ und sogar „Polynomebenen“ konstruieren und mit jenen genauso Flächenberechnungen und ähnliches durchführen - und in der Tat auch dies findet in der Physik seine Anwendung. Auch wenn wir hier mit abstrakten Strukturen zu tun haben, so zeigen wir doch allgemeingültige Dinge.